Sistemi linearnih jednačina

Sistemom linearnih algebarskih jednačina, sa m jednačina i n nepoznatih nazivamo sistem oblika:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdje su brojevi a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, koeficijenti sistema, a b_j slobodni članovi.

Naš sistem u matričnom obliku pišemo:

$$Ax = b$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matrica koeficijenata sistema, a

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ matrica (ili vektor kolona) nepoznatih, a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ matrica slobodnih članova.

Proširenom matricom sistema nazivamo matricu $\bar{A}$ koja se dobija kada se matrica A dopuni kolonom slobodnih članova, odnosno:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Sistem se naziva saglasnim, ako ima bar jedno rješenje, a nesaglasnim, ako nema rješenja.

Saglasan sistem se naziva i određenim, ako ima jedinstveno rješenje, a neodređenim ako ima više od jednog rješenja. Ukoliko je sistem neodređen, onda on ima beskonačno mnogo rješenja. U tom slučaju se neke promjenljive mogu izraziti preko drugih promjenljivih, koje nazivamo slobodnim promjenljivim.
Ekvivalentne sisteme dobijamo primjenom elementarnih transformacija, s tim što se te transformacije primjenjuju isključivo na vrste.

Gausov metod (metod eliminacije nepoznatih)

Neka je dat sistem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Mi želimo da našu matricu sistema svedemo na trougaoni oblik.

Pretpostavimo da je element $a_{11} \neq 0$. Ukoliko to ne bi bio slučaj, tada ćemo kao prvu jednačinu u sistemu zapisati onu kod koje je koeficijent uz promjenljivu x_1 različit od nule.

Naš sistem ćemo transformisati pomoću elementarnih transformacija, tako što ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i dodati drugoj jednačini. Zatim ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ i dodati trećoj. Produžavajući proces, na kraju ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ i dodati m-toj jednačini. Na taj način dobijamo ekvivalentni sistem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{cases}$$

gdje su $a_{ij}^{(1)}$ i $b_i^{(1)}$ $(i,j=\overline{2,m})$ nove vrijednosti koeficijenata i slobodnih članova.

Pretpostavimo dalje, da je koeficijent $a_{22}^{(1)} \neq 0$ i primijenimo isti postupak na m-1 jednačinu sistema, osim prve jednačine. Tako ćemo eliminisati sve koeficijente koji stoje uz promjenljivu x_2 u trećoj, četvrtoj, ..., m-toj jednačini.

Tada dobijamo sljedeći ekvivalentni sistem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{m3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)} \end{cases}$$

Nastavljajući ovaj postupak dokle god je to moguće dok ne dobijemo trougaonu matricu sistema. Ukoliko se u procesu neka od jednačina pretvori u jednačinu oblika $0=0$ nju onda odbacujemo. Ovim postupkom dolazimo do sljedeća tri slučaja.

1) Naš sistem se transformiše u sistem oblika:

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots \\ 0 = b_k^{(s)} \qquad b_k^{(s)} \neq 0 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Onda je ovakav sistem nesaglasan ili nemoguć, odnosno nema rješenja.

2) Poslije k-tog koraka dobijamo sistem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\,k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2\,k-1}^{(1)}x_{k-1} + a_{2k}^{(1)}x_k + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{k-1,k-1}^{(k-2)}x_{k-1} + a_{k-1,k}^{(k-2)}x_k + \cdots + a_{k-1,n}^{(k-2)}x_n = b_{k-1}^{(k-2)} \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}^{(k-1)}x_k + \cdots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)} \end{cases}$$

Ovaj sistem je ekvivalentan datom sistemu i on ima beskonačno mnogo rješenja, jer se promjenljive $x_1, x_2, \dots, x_k$ .. mogu izraziti preko ostalih promjenljivih $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$. Znači, naš sistem je tada saglasan i neodređen. Ovaj sistem ima opšte rješenje.

3) Za $m=n$ možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ovakav sistem je saglasan i određen, odnosno ima jedinstveno rješenje.

Naravno kao drugi dio dolazi rješavanje sistema u slučaju 2 i 3. U slučaju 2 promjenljivu x_k izražavamo preko promjenljivih $x_{k+1}, \dots, x_n$, zatim iz sljedeće jednačine x_{k-1}, sve do x_1. Slično i u slučaju 3.

<u>Primjer</u> Primjenom Gausovog metoda ispitati u zavisnosti od parametra m sljedeći sistem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ m x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ 6x_1 + (m+2)x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

__Rješenje__ Napišimo proširenu matricu sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ m & 4 & 1 & 5 \\ 6 & m+2 & 2 & 13 \end{array}\right) \underset{\substack{\underline{I}(-m)+\underline{II} \\ \underline{I}(-6)+\underline{III}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4-m & 1-m & 5-6m \\ 0 & m-4 & -4 & -23 \end{array}\right) \underset{\underline{II}+\underline{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4-m & 1-m & 5-6m \\ 0 & 0 & -3-m & -18-6m \end{array}\right)_{\underline{III}(-1)}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4-m & 1-m & 5-6m \\ 0 & 0 & m+3 & 6(m+3) \end{array}\right)$$

Jasno je da su vrijednosti parametra m koje utiču na sistem 4 i -3, odnosno vrijednosti koje određuju elementi na glavnoj dijagonali matrice.

__1. slučaj__ Za $m \neq 4$ i $m \neq -3$ dobijamo sistem koji je saglasan i određen (3. slučaj Gausovog metoda).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ (4-m)\,x_2 + (1-m)\,x_3 = 5-6m \\ (m+3)\,x_3 = 6(m+3) \end{cases}$$

Rješenje sistema je: $x_3 = 6$, koje dobijamo iz treće jednačine. Iz druge jednačine u koju zamijenimo vrijednost za $x_3 = 6$ imamo:

$$(4-m)\,x_2 = (5-6m) - 6(1-m)$$

$$(4-m)\,x_2 = 5 - 6m - 6 + 6m$$

$$(4-m)\,x_2 = -1$$

$$x_2 = \frac{1}{m-4}$$

Iz prve jednačine:

$$x_1 + \frac{1}{m-4} + 6 = 6$$

imamo da je $x_1 = \frac{1}{4-m}$.

Rješenje sistema je $\left(\frac{1}{4-m}, \frac{1}{m-4}, 6\right)$.

2. slučaj Za $m=-3$ naš sistem se svodi na sistem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 7x_2 + 4x_3 = 23 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Zadnju jednačinu odbacujemo. Izrazimo x_1 i x_2 preko promjenljive x_3. Tačnije, rješavamo sistem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 - x_3 \\ 7x_2 = 23 - 4x_3 \end{cases}$$

Iz druge jednačine je $x_2 = \frac{23}{7} - \frac{4}{7}x_3$, a iz prve $x_1 = \frac{19}{7} - \frac{3}{7}x_3$. Opšte rješenje sistema je $\left(\frac{19}{7} - \frac{3}{7}x_3, \frac{23}{7} - \frac{4}{7}x_3, x_3\right)$.

3. slučaj Za $m=4$ naš sistem se svodi na sistem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_3 = -19 \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

Pomnožimo treću jednačinu sa 3 i dodajmo drugoj jednačini. Tada dobijamo sistem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 0 = -1 \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

Ovaj sistem je nesaglasan, odnosno nema rješenja.

Kramerovo pravilo

Teorema Sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

je saglasan i određen ako i samo ako je determinanta matrice sistema $D = \det A$ različita od nule.

Tada je rješenje sistema:

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

gdje su D_j - determinante dobijene iz determinante D zamjenom j-te kolone kolonom slobodnih članova b.

Jasno je da Kramerovo pravilo možemo primijeniti samo kod sistema kod kojih je broj jednačina jednak broju nepoznatih $(m = n)$, odnosno kod sistema kod kojih je kvadratna matrica sistema.

Ako je $D = 0$ i bar jedna $D_j \neq 0$ onda je sistem nesaglasan.

Ak

Ako je $D = 0$ i svi $D_j = 0$, $j = \overline{1,n}$ onda se koristi drugi metod za rješavanje tog sistema.

Primjer Primjenom Kramerovog metoda ispitati sistem u zavisnosti od parametra m:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ m x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ 6x_1 + (m+2)x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rješenje Izračunajmo determinantu D matrice sistema:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 4 & 1 \\ 6 & m+2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + m(m+2) + 6 - 24 - 2m - m - 2 =$$

$$= m^2 - m - 12 = (m-4)(m+3)$$

Jasno je da su $m = 4$ i $m = -3$ vrijednosti parametra koje utiču na sistem.

Izračunajmo sada determinante D_j, $j = \overline{1,3}$.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 13 & m+2 & 2 \end{vmatrix} = 48 + 13 + 5(m+2) - 52 - 6(m+2) - 10 =$$

$$= -m - 3 = -(m+3)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ m & 5 & 1 \\ 6 & 13 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 36 + 13m - 30 - 13 - 12m =$$

$$= m + 3$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ m & 4 & 5 \\ 6 & m+2 & 13 \end{vmatrix} = 52 + 30 + 6m(m+2) - 144 - 5(m+2) - 13m =$$

$$= 6m^2 - 6m - 72 = 6(m-4)(m+3)$$

1. slučaj Za $m \neq 4$ i $m \neq -3$ $D = \det A \neq 0$.

Znači, po Kramerovoj teoremi, sistem je saglasan i određen. Rješenje sistema je:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-(m+3)}{(m-4)(m+3)} = \frac{1}{4-m}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{m+3}{(m-4)(m+3)} = \frac{1}{m-4}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{6(m+3)(m-4)}{(m+3)(m-4)} = 6.$$

2. slučaj Za $m=-3$ imamo da je $D=0$ i svi $D_j = 0$ $(D_1 = D_2 = D_3 = 0)$.

Sistem se svodi na sistem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 7x_2 + 4x_3 = 23 \end{cases}$$

Na isti način kao što smo to uradili kod gausovog metoda, opšte rješenje sistema je $\left(\frac{19}{7} - \frac{3}{7}x_3, \frac{23}{7} - \frac{4}{7}x_3, x_3\right)$. Znači sistem je saglasan i neodređen.

3. slučaj Za $m=4$ $D = \det A = 0$, ali je $D_1 = -7 \neq 0$, što po Kramerovoj teoremi (posljedica) znači da je sistem nesaglasan, odnosno nema rješenja.

Kronecker-Kapelijeva teorema

Teorema Sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

je saglasan ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema, odnosno $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$.

Posljedice 1) Ako je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = r = n$, onda se sistem saglasan i određen.

2) Ako je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = r < n$ onda je sistem saglasan i neodređen.

Primjer Primjenom Kronecker-Kapelijeve teoreme ispitati sistem u zavisnosti od parametra m:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ m x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ 6x_1 + (m+2)x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rješenje Napišimo proširenu matricu sistema i sredimo je elementarnim transformacijama na trougaoni oblik.

(Pogledati kako smo to uradili u slučaju Gausovog metoda)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ m & 4 & 1 & 5 \\ 6 & m+2 & 2 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4-m & 1-m & 5-6m \\ 0 & 0 & m+3 & 6(m+3) \end{array}\right)$$

1\. slučaj Za $m \neq -3$ i $m \neq 4$ imamo da je $\det A = -(m+3)(4-m) \neq 0$. Znači $\operatorname{rang} A = 3$. Jasno je da je onda i $\operatorname{rang} \bar{A} = 3$.

Po Kroneker-Kapelijevoj teoremi, pošto je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3 = n$ (n - broj nepoznatih) sistem je saglasan i određen, tj. ima jedinstveno rješenje.

Rješenje sistema je $x_1 = \frac{1}{4-m}$, $x_2 = \frac{1}{m-4}$, $x_3 = 6$.

2\. slučaj Za $m = -3$ sistem se svodi na

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 4 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2 < n = 3$ jer je $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

Po Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem je saglasan i neodređen. Opšte rješenje sistema je

$$\left(\frac{19}{7} - \frac{3}{7}x_3, \frac{23}{7} - \frac{4}{7}x_3, x_3\right).$$

3\. slučaj Za $m = 4$ sistem se svodi na

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{II \rightleftarrows III \\ III(3)+II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rang} A = 2$

$\operatorname{rang} \bar{A} = 3$ jer je $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Sistem je nesaglasan po Kroneker-Kapelijevoj teoremi.